

## 1 Introdução

A otimização da logística de transporte possui fundamental importância para os processos de gestão das empresas, sobretudo, por possibilitar a redução de custos mediante o aproveitamento eficiente dos seus recursos físicos. Desse modo, destaca-se os estudos da avaliação das rotas de escoamento para obtenção do caminho mínimo para a redução dos custos e para a potencialização da satisfação das necessidades dos clientes. Nesse sentido, a aplicação de ferramentas e metodologia da Pesquisa Operacional apresenta alta relevância, uma vez que contribuem na compreensão, mensuração e análise de problemas complexos de maneira a tornar os processos mais ágeis, práticos e menos onerosos (NASCIMENTO, 2020).

Pereira, Cunha e Silva (2015) evidenciam a relevância da aplicação de simulações para a melhoria de sistemas reais e resolução de problemas, visto que sua utilização permite melhorar o aproveitamento de oportunidades, a identificação de gargalos e o auxílio na tomada de decisões com base em dados. Nesse contexto, a aplicação da simulação para modelagem de sistema de distribuição e obtenção do caminho mínimo é tema de várias pesquisas, tais como os trabalhos de Santana et. al (2018), Almeida (2018), Santos, Brito e Barbosa (2018), dentre outros. Contudo, a exploração acerca da temática na literatura ainda possui carência de exploração.

Dessa maneira, o presente artigo visa demonstrar e analisar a aplicação da modelagem de grafos para otimização de problemas relacionados à distribuição por meio da obtenção da árvore geradora mínima utilizando os algoritmos Kruskal e Prim, permitindo uma discussão entre ambos os métodos. Para tanto, inicialmente é realizado um levantamento bibliográfico a fim de obter um panorama global acerca do tema e o embasamento teórico necessário para a realização da simulação e das discussões. Por conseguinte, seguindo os procedimentos descritos na literatura os dois algoritmos são aplicados, assim foi possível obter o caminho mínimo, ou seja, a menor rota de interligação das arestas que compõe a rede analisada e realizar discussões sobre as distinções e correlações entre os métodos dos algoritmos utilizados.

Logo, como relevância, o estudo em questão contribui com a evolução da pesquisa quanto ao tema, auxiliando pesquisadores da área na compreensão e entendimento de algoritmos de simulação operacional, além disso permite a verificação do desenvolvimento de uma simulação de forma clara, simples e prática.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1. Pesquisa operacional

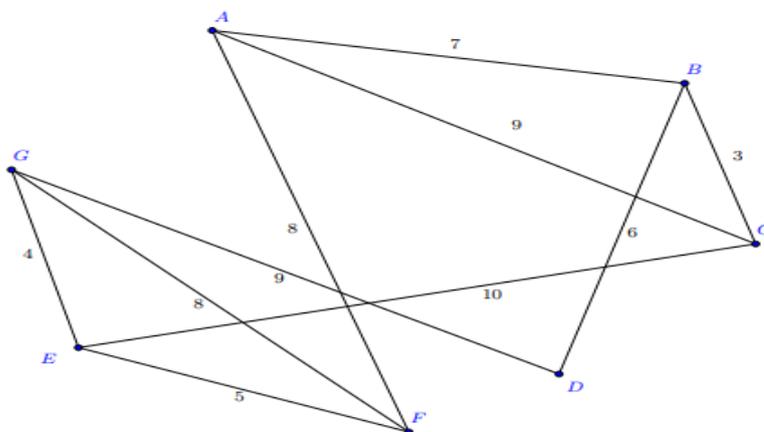
Segundo Hillier & Lieberman (2010) a pesquisa operacional (PO) é usada para a resolução de questões de minimização ou maximização de recursos dentro de uma organização. O campo de aplicação da pesquisa operacional é muito vasto, podendo ser aplicada em diferentes áreas de uma mesma empresa, atuando desde a formulação de planos logísticos até a maximização do planejamento financeiro. O objetivo desse campo de estudo é encontrar o caminho ideal para algum problema, ajudando na otimização do processo estudado e facilitando na tomada de decisão.

Segundo Oliveira e Ferreira (2011) o ponto chave da PO é na elaboração de protótipos que possibilitam a criação de simulações, onde a partir desses diferentes modelos é possível avaliar diversos cenários do mesmo processo. De acordo com Hillier e Lieberman (2010), o processo de utilização da PO se inicia com uma análise de um problema, seguido de uma coleta de dados e uma elaboração de vários modelos científicos para a resolução do problema.

Posteriormente, são realizadas experimentações para testar as hipóteses levantadas, e assim encontrar a real solução para o problema.

## 2.2. Grafo

Segundo Arenales (2007), grafos é um arranjo composto por um conglomerado de pontos, chamados vértices, e um conjunto de linhas que ligam os pontos, chamado de arcos. Sendo que os grafos podem ser orientados e não orientados. São orientados quando suas linhas possuem uma direção focada, com definições de destino e origem, em contrapartida, os não orientados, não possuem uma definição de orientação, como apresentado na Figura 1.



**Figura 1. Exemplo de um grafo**

Fonte: ALMEIDA; Lauro de avellar. (2018). Árvores: Algoritmos e Aplicações. Orientador: Paulo César Carvalho. TCC (Graduação) - *Curso de matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*.

## 2.3. Árvore mínima

Determinadas adversidades que acontecem na otimização combinatória podem ser resolvidas por meio da construção de um tipo de grafo específico, conhecido como árvore. No qual essa, é um grafo conexo e acíclico, onde se, e somente se, existir apenas uma rota entre cada par de vértices (GOLDBARG, 2012). E dentre os tipos de árvores, existe a árvore geradora mínima, que é um conceito que aparece constantemente em aplicações práticas, onde ela pode ser definida segundo como uma árvore gerada com a menor soma de suas distâncias de arestas, e que busca planejar o caminho ideal para minimizar os custos, melhor utilização de recursos e diminuir a depreciação de transportes (NETTO E JURKIEWICZ, 2017). Em uma aplicação, pode-se dizer à primeira vista que achar um caminho mínimo é substancial para qualquer tarefa que envolva custos, em virtude de que deslocamentos custam dinheiro e despesas, então, a procura por meio de diminuir essas despesas e ainda otimizar o deslocamento por meio de rotas só garantem benefícios diretos e indiretos para as organizações

## 2.4. Método Prim

Netto e Jurkiewicz (2017) o algoritmo de Prim é um algoritmo utilizado para encontrar uma árvore geradora mínima num grafo conexo, valorado e não direcionado. Isso significa que o algoritmo encontra um conjunto de grafos, dentro do grafo original, onde a soma total das linhas é mínima possível que conecte todos os vértices existentes no grafo original. Outro algoritmo famoso, que também serve para encontrar árvores mínimas é o algoritmo de Kruskal, onde este algoritmo pode ser empregado em grafos desconexos, enquanto o algoritmo de Prim, obrigatoriamente precisa de um grafo conexo, sendo uma desvantagem em comparação ao modelo de Kruskal. Com o algoritmo de Prim encontra-se uma árvore geradora mínima para

um grafo, somente se este grafo for valorado e não direcionado, este algoritmo compreende a associação de nós da rede, buscando a cada passo o nó que está mais próximo da composição corrente da árvore mínima. Assim como no algoritmo de Kruskal, considera-se um conjunto de nós conectados e um conjunto de nós não conectados. Segundo Almeida (2018) para realizar o método de Prim é necessário:

1. Escolha um vértice qualquer para iniciar o conjunto de grafo, esse algoritmo começa com a escolha da aresta do vértice escolhido.
2. A partir da primeira ligação, sempre usando arestas ligadas à vértices que já estejam conectados à árvore em formação, escolhe-se a próxima aresta de menor valor, nunca permitindo a formação de ciclos.
3. O algoritmo é finalizado com a junção da última vértice da árvore, lembrando que se aplica a regra de que se o conjunto possui  $N$  vértices, o número de arestas vai ser  $N-1$ .

### 2.5. Método Kruskal

Netto e Jurkiewicz (2017) o algoritmo de Kruskal é um método da aplicação da teoria dos grafos, que tem como objetivo realizar uma árvore geradora mínima para um grafo conexo com distâncias. Então, pode-se dizer que ele vai definir um conjunto de arestas que formam uma árvore que abrange todos os vértices, onde a distância total da ligação desses vértices, é a mínima possível. Esse algoritmo funciona de maneira semelhante ao algoritmo de Prim, possuindo diferença no ponto de que a próxima aresta a ser analisada não precisa estar conectada à árvore que está se formando, a situação da aresta escolhida não fechar um circuito também faz parte deste algoritmo. Segundo Almeida (2018) Os passos para realizar o método de Kruskal é o seguinte:

1. Colocar as arestas disponíveis em ordem crescente;
2. Definir o número de arcos do meu conjunto mínimo, aplicando a regra de que se o conjunto possui  $N$  vértices, o número de arestas vai ser  $N-1$ .
3. Definir o menor somatório de um conjunto de arcos que não formam ciclos

### 2.6. Roteirização

A roteirização de veículos visa atender à demanda, criando uma rota que otimiza os recursos disponíveis, bem como na diminuição de distâncias, custo e tempo (MELO; NASCIMENTO; SILVA, 2015). Assim, a roteirização é realizada por meio de um modelo teórico ou computacional, que atenda às necessidades da empresa, possibilitando a redução de gastos e alocação desses recursos para outras atividades. Segundo Valente (2008) existem variáveis que devem ser consideradas para a criação de uma boa roteirização, sendo elas a região geográfica que está localizado os receptores, o roteiro designado para cada veículo, o tempo que o serviço deverá ser realizado e o local de saída dos veículos para entrega. Desse modo, visando a otimização dos processos de logística, a roteirização de rotas juntamente com a teoria de árvore mínima, são o principal alicerce para chegar na redução de gastos e na melhoria do nível de satisfação dos clientes.

## 3 Metodologia

Como a presente pesquisa visa o demonstrar um exemplo de definição de uma árvore mínima pela aplicação dos algoritmos de Kruskal e Prim, esse trabalho foi dividido em etapas, no qual a primeira consiste no levantamento bibliográfico referente a aplicação e evolução de ambos os métodos, com a intenção de explorar e aumentar a percepção sobre o assunto de modo a esclarecer a relevância dos algoritmos, facilitar a aplicação e permitir uma melhor discussão.

Dessa forma, a segunda etapa compreende ao desenvolvimento dos algoritmos considerando as etapas de formação dos grafos em questão, conforme mencionados no referencial teórico, definindo a quantidades de nós na árvore a ser analisada e verificando a quantidade de possibilidades de ligação entre esses nós, as chamadas arestas, representando esse fato em um grafo em duas dimensões, atribuindo, ainda, valores às mesmas, isto é, as distâncias entre os nós, e permitindo selecionar apenas aqueles que possibilitam a conexão entre todos os vértices do grafo inicial de modo a alcançar a rota mínima.

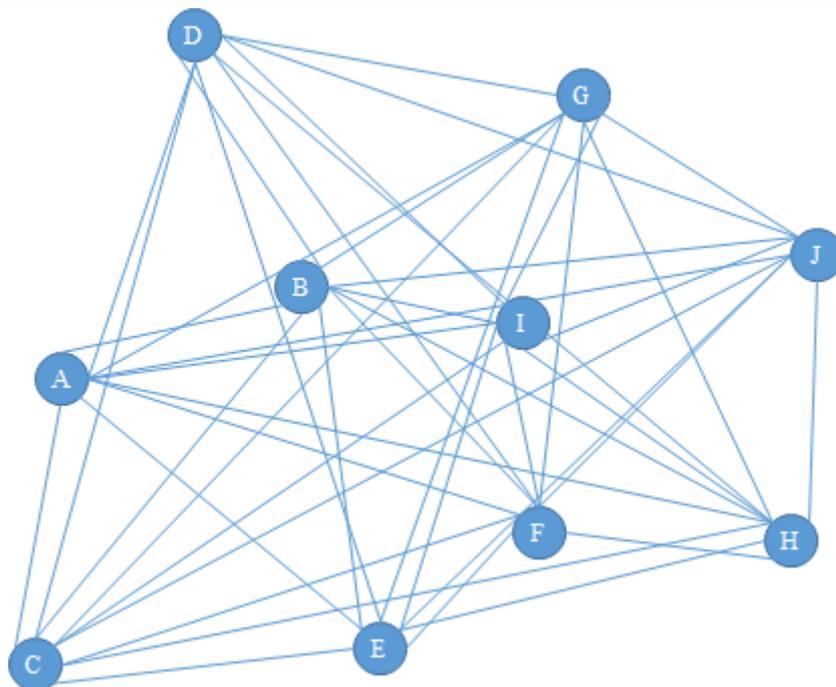
Assim, a terceira etapa consiste na análise e interpretação dos dados obtidos na etapa anterior, avaliação do conjunto de arestas que compõem a árvore mínima geradora, verificando o somatório destas a fim de mencionar, conforme o exemplo dado, quantos quilômetros teria a menor rota de ligação entre todos os nós do grafo por ambos os algoritmos, dessa maneira, permite-se uma discussão sobre os métodos, realizando comparações e conclusões pertinentes.

Nesse sentido, o artigo em questão é caracterizado como básico, em relação à natureza, visto que contribui com a ampliação de novos conhecimentos e com a evolução da pesquisa em relação ao tema abordado. Além disso, quanto aos objetivos é caracterizada como exploratória por auxiliar no entendimento de um fenômeno, que é a simulação, permitindo uma maior familiaridade com o tema por intermédio da aplicação dos algoritmos.

Ainda, referente a abordagem, é considerada como quantitativa e qualitativa, uma vez que aborda o tratamento de números como forma de desenvolver o problema de pesquisa operacional, mas também, busca traduzir esses números de forma a atrelar explicações qualitativas quanto ao fenômeno estudado. Por fim, concernente ao procedimento, os caminhos da pesquisa são identificados como experimentais, pois verifica-se as variáveis que influenciam no objeto pesquisado, analisando o efeito destas, isto é, as relações de distância entre os nós dos grafos, as chamadas arestas valoradas, influenciam no desenvolvimento da árvore mínima, ou seja, aquela que proporciona a menor rota de interligação entre os pontos definidos da rede.

#### **4 Análise dos resultados**

Para o desenvolvimento das árvores mínimas há a necessidade, primeiramente, de definição dos nós da rede, correspondentes às distribuidoras e aos pontos de entrega, assim, no grafo, esses são denominados de vértices, além disso, as interações entre entes são representadas pelas arestas, que constituem, no caso do estudo desse artigo, nas distâncias entre os pontos de entrega e as distribuidoras avaliadas, isto é, os vértices. Dessa forma a Figura 2 apresenta a representação no espaço de um grafo com 10 nós, e as relações entre estes, intencionando demonstrar os passos de desenvolvimento de uma possível roteirização.



**Figura 2. Representação de Grafo**

Por intermédio da Figura 2, observa-se que diante de 10 nós, representados pelas letras de A até J, é possível verificar a existência de 45 possibilidades de interação, isto é, arestas entre estes, representadas por distâncias atribuídas a estes pontos. Assim, todos os valores numéricos de distâncias entre estes vértices podem ser visualizados na Figura 3.

VÉRTICES	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	99	125	243	283	396	517	719	342	737
B	0	0	356	141	233	201	180	461	26	420
C	0	0	0	593	197	434	774	752	517	897
D	0	0	0	0	582	537	248	760	315	603
E	0	0	0	0	0	6	516	293	226	513
F	0	0	0	0	0	0	314	74	24	269
G	0	0	0	0	0	0	0	387	109	106
H	0	0	0	0	0	0	0	0	199	119
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	163
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Figura 3. Valores das distâncias entre os nós**

Conforme a Figura 3, foram atribuídos valores numéricos que simbolizam uma distância entre os nós, valores estes que serão tratados nos algoritmos para definir qual a menor rota de ligação entre os 10 nós, assim, entende-se a Figura 3 da seguinte forma: O caminho percorrido do vértice A para o B tem distância de 99 km, de A para C de 125 km, de A para D de 243 km e sucessivamente.

Dessa forma, exibe-se um total de 100 interações entre todos os vértices, no entanto, para algumas ligações foi atribuído o valor zero, por não haver distância entre estes, como é o caso da diagonal principal, isto é, não há distância para ir de um certo ponto para este mesmo

ponto, ou seja, de A para A, de B para B, C para C e sucessivamente até J para J, além disso, abaixo da diagonal principal, também não há caminho, uma vez que estes já foram representados, por exemplo, o caminho de B para A já foi retratado em A para B, com valor de 99 km, C para A é representado em A para C com 125 km e assim continuamente.

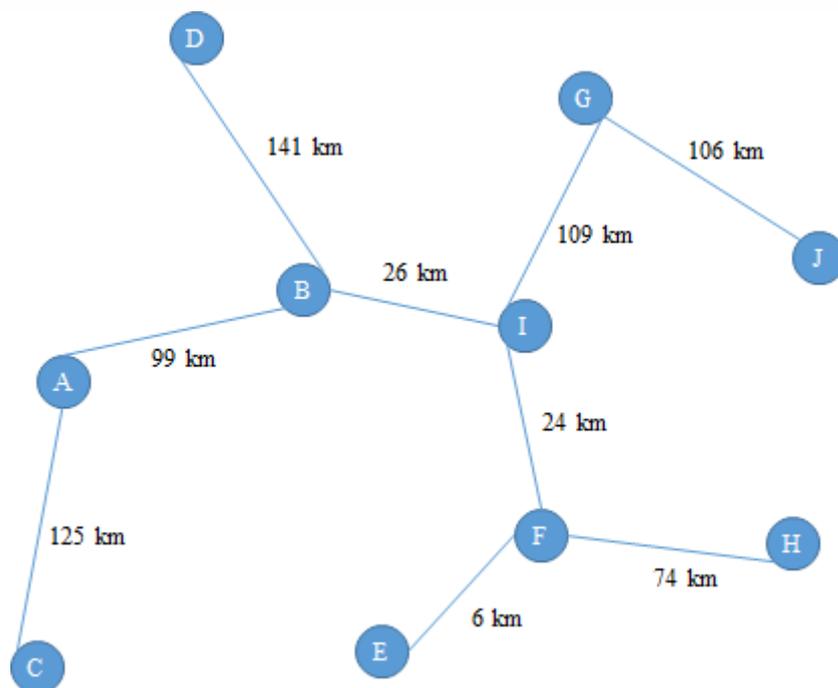
Nesse sentido, subtraindo as possibilidades de caminhos que formam ciclos, ou seja, de um ponto para esse mesmo ponto, e os caminhos paralelos já retratados, sobram um total de 45 possibilidades de relação entre os 10 nós, a partir disso, esses valores são analisados e tratados por meio da aplicação dos algoritmos visando a obtenção do menor caminho de que interligam todos os nós sem haver a repetição deles, isto é, a árvore mínima, que tem o objetivo de gerar o menor custo de transporte levando em consideração as distâncias percorridas.

Dessa maneira, a aplicação do método de Kruskal segue com a avaliação dos valores de distância dos nós, verificando dos menores para os maiores, assim, iniciando a inclusão das arestas com menores distâncias e excluindo aquelas que formam ciclos na árvore em desenvolvimento, interrompendo a incorporação destas quando atinge-se um número referente a quantidade de vértice da árvore menos 1, isto é, 9 arestas nesse caso em específico que apresenta 10 nós. Assim, a Figura 4 demonstra quais arestas foram incluídas na árvore mínima.

Vértice 1	Vértice 2	Distância (km)	Nº de Arestas
E	F	6	1
F	I	24	2
B	I	26	3
F	H	74	4
A	B	99	5
G	J	106	6
G	I	109	7
H	J	119	-
A	C	125	8
B	D	141	9

**Figura 4. Arestas incluídas pelo Algoritmo de Kruskal**

Conforme a Figura 4, é possível verificar que as arestas foram incorporadas na árvore mínima, apresentada na Figura 5, de forma gradativa, tendo que excluir a aresta “HJ” por formar um ciclo durante o desenvolvimento da árvore, finalizando o incremento quando foram adicionadas um total de 9 arestas.



**Figura 5. Árvore mínima desenvolvida pelo Algoritmo de Kruskal**

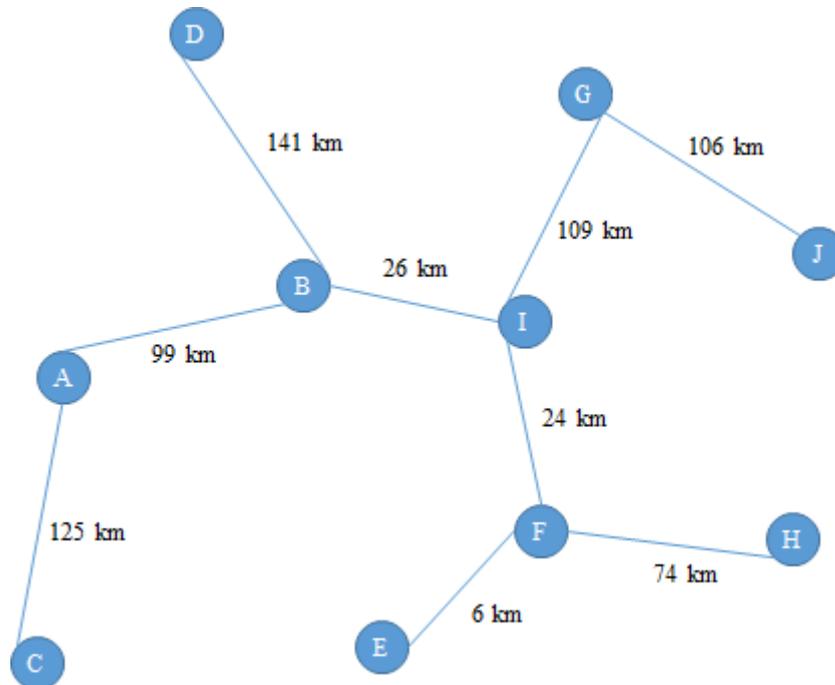
Assim, a árvore mínima geradora é apresentada na Figura 5, revelando a rota com menor distância de transporte entre todos os 10 nós, auxiliando na redução de custos de transporte e nos tempos de entrega por permitir a utilização da rota mais eficiente considerando apenas as distâncias. Dessa forma, no exemplo em questão é notório que a menor rota exprime um somatório de 710 km.

De maneira análoga, para o método de Prim é necessário a escolha aleatória de um vértice para iniciar a inserção das arestas na árvore mínima, portanto, nesse exemplo optou-se por iniciar com o nó “A”, logo, de todas as opções de envolvendo o vértice escolhido é adicionado aquele que apresenta menor valor de distância, dessa forma, a árvore já se compõe com 2 vértices, portanto, o próximo passo deve ser realizado de maneira a incorporar a próxima aresta de menor distância envolvendo esses dois vértices, logo, a árvore passa a apresentar 3 vértices, e assim por diante, até incorporar os 10 nós e apresentar 9 arestas. Vale ressaltar que as arestas que quando inclusas na árvore formam um ciclo são excluídas, escolhendo a de distância imediatamente menor. A Figura 6 expõe a ordem de inserção destas e com destaque em vermelho daquelas que foram excluídas por formar ciclos.

Vértice 1	Vértice 2	Distância (km)	Nº de Arestas
A	B	99	1
B	I	26	2
F	I	24	3
E	F	6	4
F	H	74	5
G	I	109	6
G	J	106	7
H	J	119	-
A	C	125	8
B	D	141	9

**Figura 6. Arestas incluídas pelo Algoritmo de Prim**

Por meio da Figura 6 é possível perceber que primeiro escolheu-se a menor aresta que apresentava o nó “A” como um dos vértices, incorporando na árvore mínima, visualizada na Figura 03, a aresta “AB”, assim, a próxima aresta adicionada, “BI”, constitui na que exibiu menor distância tendo como nós o “A” ou “B”, logo, o passo seguinte buscou pela menor aresta que possuísse os vértices “A”, “B” ou “I”, encontrando a “FI”, e assim sucessivamente até adicionar 9 arestas. Portanto a Figura 7 exhibe a árvore mínima gerada por intermédio da aplicação do algoritmo de Prim.



**Figura 7. Árvore mínima desenvolvida pelo Algoritmo de Prim**

Diante do exposto, percebe-se que as árvores mínimas desenvolvidas pelos dois métodos são idênticas, apresentando um mesmo valor de somatório, de 710 km, no entanto, a aplicação manual favorece o uso do Algoritmo de Kruskal, uma vez que este é mais intuitivo e prático, já que conta apenas com a incorporação dos vértices considerando os menores,

diferente do método de Prim, no qual a adição da próxima aresta sempre depende do último passo.

De maneira similar, Almeida (2018) afirma que as árvores mínimas obtidas por meio dos dois algoritmos são idênticas, contudo, o método de Kruskal manifesta maior facilidade de manipulação manual do que o de Prim, justamente pela circunstância da não necessidade de seleção da próxima aresta levando em consideração esta estar ligada a algum dos vértices já acrescentados, apesar disso, quando considera-se a utilização de computadores, os dois métodos apresentam implementações próximas.

## 5 Conclusão

O artigo em questão teve o propósito de apresentar o desenvolvimento de um método de roteirização, o qual busca definir a menor rota de distribuição de uma rede de cliente e distribuidor, com a finalidade de reduzir os custos e o *lead time* de entrega, logo, por meio das técnicas de aplicação dos algoritmos de Kruskal e Prim foi possível demonstrar os passos de definição da árvore mínima geradora, permitindo uma análise entre os processos de desenvolvimento da melhor rota pelos dois algoritmos.

Assim, apresentou-se um exemplo de grafo com 10 nós e 45 possibilidades de relação entre eles, isto é, as distâncias, portanto, ambos os métodos apresentam a mesma árvore mínima, por consequência, resultados semelhantes quanto a melhor rota, com distância total a ser percorrida de 710 km, no entanto, o método de Kruskal revelou maior facilidade de aplicação, uma vez que, como o desenvolvimento da árvore mínima ocorreu de forma manual, a técnica foi executada de maneira mais simples e intuitivo, apenas com a ordenação das distâncias de forma crescente, adicionando as arestas de menor valor e atentando-se para a não formação de ciclos.

Já o método de Prim manifesta uma maior morosidade devido às dependências de incorporação somente das arestas que já possuem vértices englobados na árvore mínima, devendo selecionar a de menor valor, assim, o próximo passo de adição dessas arestas sempre está subordinado ao passo atual.

Apesar disso, as demonstrações de desenvolvimento de árvores mínimas revelam que é possível definir, por intermédio dos algoritmos de Kruskal e Prim, rotas mínimas de transporte entre determinados locais de uma rede, assim, os métodos auxiliam no gerenciamento operacional e na tomada de decisão, permitindo o desenvolvimento de estratégias para a solução de problemas.

Para trabalhos futuros, sugere-se uma aplicação em uma distribuidora real, para analisar a aplicabilidade das técnicas apontadas nessa pesquisa, a fim de verificar quantitativamente a proporção que a utilização desse método pode reduzir nos percursos de roteirização, por consequência, os custos. Além disso, em posse dos presentes dados, permite-se elaborar um levantamento dos tempos relacionados ao transporte, o qual consiste em uma cronoanálise dos tempos de deslocamento entre os percursos, assim, o mesmo poderia demonstrar o impacto causado pela diminuição dos *lead times* de entrega apresentados.

## 6 Referências

ALMEIDA; Lauro de avellar. (2018). Árvores: Algoritmos e Aplicações. Orientador: Paulo César Carvalho. TCC (Graduação) - *Curso de matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC\\_2018\\_Lauro-e-Almeida.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC_2018_Lauro-e-Almeida.pdf)>. Acesso: 15 de jul. 2021.

ARENALES, M., ARMENTANO, V., MORABITO, R., & YANASSE, H. (2007). Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia. *São Paulo: Editora Campus*.

GOLDBARG, M., & GOLDBARG, E. (2012). Grafos: Conceito, algoritmos e aplicações. *Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda.*

HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. Introdução à Pesquisa Operacional. (2010). 8ª edição, Porto Alegre: AMGH. *Editora Bookman.*

MELO, C. J. C. S., NASCIMENTO, L. J. A., & SILVA, M. M. (2015). Prestação de serviços de fretamento contínuo: análise de uma empresa de ônibus de Caruaru. *XXXV Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Fortaleza, CE, Brasil. Disponível em: <[http://www.abepro.org.br/biblioteca/TN\\_STO\\_206\\_222\\_28124.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/TN_STO_206_222_28124.pdf)>. Acesso em :15 de jul. 2021.

NETTO, P. O. B., & JURKIEWICZ, S. (2011). Grafos: Introdução e Prática. *São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda.*

OLIVEIRA, F.F. FERREIRA.R.J.P. (2011). Análise das contribuições da pesquisa operacional para as decisões de layout em gestão de produção: uma revisão da literatura. *XXXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Belo Horizonte, MG, Brasil. Disponível em: <[http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2011\\_tn\\_sto\\_135\\_858\\_18735.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2011_tn_sto_135_858_18735.pdf)>. Acesso em: 16 de jul. 2021.

VALENTE, Amir Mattar. (2008). Transporte Rodoviário de Cargas. In: Qualidade e produtividade em transportes. *São Paulo: Cengage Learning.*